5013CH14

14 شماریات (STATISTICS)

14.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ نے اعداد شمار کی غیر مرتب تعددی بٹاؤ میں درجہ بندی کرنا سیکھا آپ نے اعداد و شمار کا مختلف گراف جیسے ہسٹوگرام (جس میں متغیر چوڑائی والے بھی شامل بار گراف تعدد کثیر ضلعی کا تصویری اظہار بھی سیکھا بلکہ آپ ایک قدم آگے بڑھ گئے کیونکہ آپ نے غیر مرتب اعداد شمار کے عددی اظہار کا مطالعہ بھی کیا جسے مرکزی رجحان کی پیائش کہتے ہیں جیسے درمیانہ، وسطانیہ اور موڈ۔ اس باب میں ہم ان تین پیائشوں کی توسیع غیر مرتب اعداد شمار سے مرتب اعداد اور شمار تک کریں گے ہم مجموعی تعدد (cumulative frequency)، مجموعی تعدی بٹاؤ اور مجموعی تعددی منحنی جسے او جائیو (Ogives) بھی کہتے ہیں، کو کس طرح بنایا جاتا ہے، کے تصور کا مطالعہ کریں گے۔

14.2 مرتب اعداد شمار کا درمیانہ

مشاہدات کا درمیانہ (یا اوسط) جیسا کہ ہم جانتے ہیں، تمام مشاہدات کے حاصل جمع کو مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ یاد کیجیے آپ نے نویں کلاس میں بڑھا تھا اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مشاہدات ہیں اور $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ان کے متعلقہ تعدد ہیں۔ اتب درمیانہ مشاہدہ x_1 ، f_1 بار x_2 ، f_2 بار واقع ہوتا ہے۔

اب مشاہدات کا حاصل جمع $= f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n$ اور مشاہدات کی تعداد $= f_1 + f_2 \ldots + f_n$

اس لئے دئے ہوئے اعداد و شمار کا درمیانہ ہے

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

یاد کیجئے ہم یونانی علامت Σ (سگما) کا استعمال کر کے اس کو مختصر شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

جس کو مزید مختصر کرنے پر لکھا جاتا ہے۔ $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ ، یہ بات ظاہر کہ i، 1 سے n تک کی قدر دیتا ہے۔

آیئے اس فارمولہ کو مندرجہ ذیل مثال میں درمیانہ معلوم کرنے میں کرتے ہیں۔

مثال 1: ایک اسکول کی دسویں کلاس کے 30 طلباء کے ذریعے حاصل کردہ ریاضی میں 100 نمبروں میں سے حاصل کردہ نمبر مندرجہ ذیل جدول میں دئے گئے ہیں۔ طلبا کے ذریعے حاصل کئے گئے نمبروں کا درمیانہ معلوم کیجیے۔

حاصل کردہ نمبر (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
طلباء کی تعداد (f_i)	1	1	3	4	2	2	4	4	1	1	2	3	1

حل: یاد کیجیے کہ درمیانہ نمبر معلوم کرنے کے لئے ہمیں ہر ایک x_i کا اس کے نظیری f_i سے حاصل ضرب درکار ہے۔ آیئے پہلے اس کو کالموں میں رکھتے ہیں جیسا شکل 14.1 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 14.1

حاصل کردہ نمبر x_i	طلباء کی تعداد (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
کل	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

اب $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

اس لئے حاصل کردہ نمبروں کا درمیانہ ہے = 59.3

روزمرّہ کی زندگی کی صورت حال میں زیادہ تر یہ ہوتا ہے کہ اعداد وشمار عام طور پر اتنے زیادہ ہوتے ہیں کہ ان کے معنی خیز مطالعہ کے لئے ان کو مرتب اعداد وشمار میں یکجا کیا جائے۔ اس لئے ہمیں غیر مرتب اعداد وشمار کو مرتب اعداد وشمار میں بدلنے کی ضرورت ہے اور ایک ایسا طریقہ معلوم کریں جس سے ان کا درمیانہ معلوم کیا جا سکے۔

آیئے مثال 1 میں دیئے گئے غیر مرتب اعداد وشمار 15 کو چوڑائی والے کلاس وقفہ لے کر مرتب اعداد وشمار میں تبدیل کرتے ہیں۔ یاد کیجئے کہ ہر کلاس وقفہ کا تعدد لکھتے وقت، طلبا جو بالائی کلاس حد میں آئے۔ ان کو اگلی کلاس میں شامل کرتے ہیں مثال کے طور پر 4 طلبا جنہوں نے 40 نمبر حاصل کئے ہیں ان کو کلاس وقفہ 55-40 میں شامل کریں گے۔ 40-25 میں نہیں۔ اس بات کو ذہن میں رکھتے ہوئے آیئے مرتب تعددی بناوٹ جدول بناتے ہیں (جدول 14.2 دیکھیے)

جدول 14.2

کلاس وقفہ	10 - 25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
طلباء کی تعداد	2	3	7	6	6	6

اب ہمیں ہر کلاس وقفہ کے لئے ایک ایسا نقطہ چاہیے جو پوری کلاس کی نمائندگی کرے۔ ایسا مانا جاتا ہے ہر کلاس وقفہ کی تعدد اس کے وسطی نقطہ کے ارد گرد مرکوز ہوتی ہے۔ اس لئے ہر کلاس وقفہ کا وسطی نقطہ (کلاس مارک) اس کلاس میں آنے والے مشاہدات کی نمائندگی کے لئے چنا جاتا ہے۔ یاد کیجئے کہ ہم کسی کلاس کا وسطی نقطہ (یا کلاس مارک) اس کی بالائی اور زیریں حد کی اوسط معلوم کر کے نکالتے ہیں: یعنی

$$\text{کلاس مارک} = \frac{\text{زیریں حد} + \text{بالائی حد}}{2}$$

جیسے جدول 14.2 میں کلاس 25-10 کے کلاس مارک $\frac{10+25}{2}$ یعنی 17.5 ہیں

اسی طرح سے ہم باقی کلاس وقفوں کے کلاس مارکس آسانی سے نکال سکتے ہیں۔ ان مارکس کو ہم x_i's تصور کرتے ہیں

اب عمومی طور پر i ویں کلاس وقفہ کے لئے تعدد f_i ہے اور اس کا نظیری کلاس مارک x_i ہے۔ اب ہم اسی طریقہ سے درمیانہ معلوم کریں گے جیسا کہ مثال 1 میں کیا گیا ہے۔

جدول 14.3

کلاس وقفہ	طلبا کی تعداد (f_i)	کلاس مارک (x_i)	$f_i\,x_i$
10-25	2	17.5	35-0
25-40	3	32.5	97-5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.5
70-05	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
کل	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

آخری کالم میں ملا قدروں کا حل جمع ہمیں $\Sigma f_i x_i$ دیتا ہے اس لئے دئے ہوئے اعداد و شمار کا درمیانہ $\overline{x}$ ہے۔

$$\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

درمیانہ معلوم کرنے کے اس نئے طریقہ کو راست طریقہ کہتے ہیں درمیانہ معلوم کرنے کا ہم نے یہ مشاہدہ کیا جدول 14.1 اور 14.3 میں ایک ہی اعداد و شمار کو استعمال کیا گیا اور درمیانہ معلوم کرنے کا ایک ہی فارمولہ لگایا گیا لیکن نتیجہ مختلف آیا۔ کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہوا، اور ان میں سے کون سا طریقہ زیادہ صحیح ہے؟ دو قدروں میں یہ فرق جدول 14.2 میں لئے گئے وسطی کی وجہ سے ہے، 59.3 صحیح درمیانہ ہے جب کہ 2 تقریبی۔

کبھی جب x_i اور f_i کے عددی قدر بہت بڑی ہوتی ہے تب x_i اور f_i کا حاصل ضرب معلوم کرنا کافی مشکل اور پیچیدہ ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت حال کے لئے کوئی ایسا طریقہ سوچئے جس سے تحسیبات میں کافی آسانی ہو جائے۔ f_i^{-1} کے ساتھ کچھ بھی نہیں کر سکتے لیکن ہم x_i کو ایک چھوٹے عدد میں بدل سکتے ہیں۔

تا کہ تحسیبات مختصر اور آسان ہو جائیں۔ آپ ایسا کیسے کریں۔ ایک متعین عدد کو x_i میں سے گھٹانے کے بارے میں آپ کا خیال ہے۔ آیئے اس طریقہ کو استعمال کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

سب سے پہلا قدم یہ ہے کہ x_i, s میں ایک درمیانہ فرض کیجئے اور اس کو 'a' سے ظاہر کیجئے۔ اپنے تحسیبات کو مزید آسان بنانے کے لئے ہم وہ فرض کرتے ہیں جو $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کے وسط میں ہے اس لئے ہم $a=47.5$ یا $a=62.5$ چن سکتے ہیں،

آیئے $a=47.5$ چنیے

سے انحراف یعنی $d_i = x_i - a = xi - 47.5$

بہتر اقدام f_i اور d_i کا حاصل ضرب معلوم کرنا ہے اور تمام $f_i\, d_i$ کا حاصل جمع معلوم کرنے سے یہ تحسیب مندرجہ ذیل جدول 14.4 میں دکھائی گئی ہے۔

جدول 14.4

کلاس وقفہ	طلبا کی تعداد (f_i)	کلاس مارکس (x_i)	$f_i = d_i - 47.5$	$f_i\, d_i$
10-25	2	17.5	–30	–60
25-40	7	32.5	–15	–45
40-55	7	47.5	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
کل	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

اس لئے جدول 14.4 سے انحرافوں کا درمیانہ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

اب $\bar{d}$ اور $\bar{x}$ کے درمیان تعلق کو معلوم کیجیے۔

کیونکہ d_i حاصل کرنے کے لئے ہم، (a) کو ہر ایک x کو گھٹانے اس لئے درمیانہ $\bar{x}$ حاصل کرنے کے لئے ہمیں $\bar{d}$ میں a کو جمع کرنے کی ضرورت ہے۔ اس کو ریاضیاتی طور پر ہم لکھتے ہیں۔

انحراف کا درمیانہ $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

اس لئے $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

اس لئے $= \bar{x} - a$

$$\bar{x} = a + \bar{d}$$

یعنی $\overline{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

a $\Sigma f_i d_i$ اور Σf_i کی قدریں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\overline{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

اس لئے حاصل کردہ نمبروں کا درمیانہ 62 ہے۔

اوپر جس طریقہ پر بحث کی گئی ہے اسے فرض کئے گئے درمیانہ کا طریقہ

سرگرمی 1: جدول 14.3 سے x_i (یعنی 17.5, 32.5 اور اسی طرح آگے بھی) کو a کے طور پر لے کر درمیانہ معلوم کیجیے آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔ آپ دیکھتے ہیں کہ ہر ایک حالت میں نکالا گیا درمیانہ ایک ہی ہے یعنی 62۔ (کیوں)

اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ درمیانہ کی قدر a کے انتخاب پر منحصر نہیں ہے۔

جدول 14.4 میں مشاہدہ کیجیے کالم کی تمام قدریں 15 کے اضعاف ہیں۔ اس لئے اگر کالم کے تمام قدروں کو ہم 15 سے تقسیم کریں تو ہمیں بہت سے چھوٹے عدد ملیں گے جن کو f_i سے ضرب کرنا ہوگا۔

(یہاں 15 ہر ایک کلاس کا سائز ہے)

اس لئے مان لیجیے $u_i = \frac{x_i - a}{h}$، جہاں فرض کیا گیا درمیانہ a اور h کلاس کا سائز ہے۔ اب ہم اس طرح سے معلوم کریں اور $\Sigma f_i u_i$ پھر) $h=15$ لے کر۔ آیئے جدول 14.5 بناتے ہیں۔

جدول 14.5

کلاس وقفہ	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17-5	–30	–2	–4
25-40	3	32-5	–15	–1	–3
40-55	7	47-5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77-5	30	2	12
85-100	6	92-5	45	3	18
کل	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

مان لیجیے $\overline{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$

یہاں، دوبارہ، آیئے $\overline{x}$ اور $\overline{u}$ کے درمیان تعلق معلوم کرتے ہیں۔

ہمارے پاس ہے

$$\overline{u} = \frac{\Sigma f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i - a\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\overline{x} - a\right]$$

اس لئے $h\overline{u} = \overline{x} - a \quad \overline{x} = a + h\overline{u}$

یعنی $\overline{x} = a + h\overline{x} \quad a + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$

اب جدول 14.5 سے قدریں a، h، اور $\Sigma f_i u_i$ ، Σf_i رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\overline{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

اس طرح سے طالب علم کے ذریعے حاصل کردہ نمبروں کا درمیانہ 62 ہے

اوپر بحث کیا گیا طریقہ حرکت انحراف طریقہ کہلاتا ہے

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ

- حرکت انحراف استعمال کرنے میں آسان ہوگا اگر d_i میں کوئی مشترک جزو ضربی ہوں
- تینوں طریقوں سے نکالا گیا درمیانہ ایک ہی ہے
- فرض کیا گیا درمیانہ اور حرکت انحراف طریقہ، راست طریقہ کی مختصر شکل ہے۔
- فارمولہ $\overline{x} = a + h$ پھر بھی صحیح ہے اور استعمال ہوگا اگر a اور h ایسے دئے ہوئے نہیں ہوں جیسے اوپر دئے گئے ہیں لیکن کوئی غیر صفر اعداد ہوں جبکہ $x_i = \frac{x_i - a}{h}$

آیئے ان طریقوں کو دوسری مثالوں میں حل کرتے ہیں

مثال 2: نیچے دئے گئے جدول میں ہندوستان کے مختلف صوبوں اور مرکز کے زیر انتظام علامتوں کے دیہاتی علاقوں کے پرائمری اسکول کی خاتون ٹیچر کا فی صد بٹاؤ دیا ہوا ہے۔ خاتون ٹیچرس کا دریانہ فیصد مذکورہ بالا تینوں طریقوں سے معلوم کیجیے۔

خاتون ٹیچر کا فی صد	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
صوبوں/U.T کی تعداد	6	11	7	4	4	2	1

(ذرائع: این سی ای آر ٹی کے ذریعے کئے گئے ساتواں کل ہند اسکولی تعلیم سے متعلق سروے کے مطابق)

حل: لیجئے اس لئے پہلے ہر ایک لاس کے کلاس مارکس x_i معلوم کرتے ہیں۔ اوران کو کالموں میں رکھتے ہیں (دیکھیے جدول 14.6)

جدول 14.6

خاتون ٹیچرس کا فی صد	صوبوں کی تعداد	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

یہاں ہم $a = 50$، $h = 10$، لیتے ہیں تب $d_i = x_i - 50$ اور $u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$

اب ہم d_i اور u_i معلوم کریں گے اوران کو جدول 14.7 میں رکھیں گے

جدول 14.7

خاتون ٹیچرس کا فی صد	صوبوں/UT کی تعداد	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15-25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25-35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35-45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45-55	4	50	0	0	200	0	0
55-65	4	60	10	1	240	40	4
65-75	2	70	20	2	140	40	4
75-85	1	80	30	3	80	30	3
کل	35				1390	–360	–36

اوپر دیے گئے جدول سے ہمیں ملتا ہے $\Sigma f_i x_i = 1390$، $\Sigma f_i = 35$، $\Sigma f_i d_i = -360$، $\Sigma f_i x_i = 36$

راست طریقہ کو استعمال کرنے پر $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

حرکت انحراف طریقہ اپنانے پر $\overline{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$

اس لئے دیہاتی علاقوں کے پرائمری اسکول کے خاتون ٹیچرس کا فیصد درمیانہ 39.71 ہے۔

ریمارک: تینوں طریقوں سے نتیجہ ایک ہی آیا۔ اس لئے استعمال کئے گئے طریقہ کے انتخاب x_i اور f_i کی عددی قدروں پر ہوتا ہے اگر x_i اور f_i کافی چھوٹے ہیں تب راست طریقہ کافی مناسب ہے۔ اگر x_i اور f_i عددی طور پر کافی بڑے ہیں تب ہم درمیانہ یا حرکت انحراف طریقہ کا استعمال کرتے ہیں۔ اگر کلاس کے سائز غیر مساوی ہیں تب بھی ہم حرکت انحراف کا طریقہ استعمال کریں گے اس کے لئے ہم h کو d_i ایک مناسب قاسم کے طور پر لیا ہوگا۔

مثال 3: مندرجہ ذیل بٹا ؤ ایک دن کی کرکٹ میں بولروں کے ذریعے لئے گئے وکٹوں کی تعداد کو دکھاتا ہے مناسب طریقہ کو

استعمال کر کے وکٹوں کی تعداد کا درمیانہ معلوم کیجیے۔ درمیانہ ہمیں کس بات کا پتہ دیتا ہے۔

وکٹوں کی تعداد	20-60	60-100	100-150	150-250	25-350	350-450
بولروں کی تعداد	7	5	16	12	2	3

حل : یہاں کلاس کا سائز بدلتا ہے اور x_i بڑے ہیں، اس لئے ہم حرکت انحراف طریقہ کو استعمال کریں گے جس میں $a = 200$ اور $h = 20$ لے کر تب ہمیں جدول 14.8 کے اعداد و شمار ملیں گے۔

جدول 14.8

لی گئی وکٹ کی تعداد	بولروں کی تعداد	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f$
20-60	7	40	–160	–8	–56
60-100	5	80	–120	–6	–30
100-150	16	125	–75	–3.75	–60
150-250	12	200	0	0	0
250-350	2	300	100	5	10
350-450	3	400	200	10	30
کل	**45**				**–106**

اس لئے $\bar{u} = \frac{-106}{45}$ اس لئے $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$

اس سے پتہ چلتا ہے کہ اوسطاً 45 بولروں کے ذریعے ایک دن کی کرکٹ میں لی گئی وکٹوں کی تعداد 152.89 ہے۔ اسے ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح ہم اس سیکشن میں پڑھے گئے تصورات کا اچھی طرح استعمال کریں گے۔

سرگرمی 2: اپنی کلاس کے طلباء کو 3 گروپوں میں بانٹئے اور ہر ایک گروپ سے مندرجہ ذیل عملی کام کرنے کے لئے کہیں

1۔ آپ کے اسکول کے ذریعے لئے گئے ریاضی کے امتحان میں تمام طلباء کے ذریعے حاصل کئے گئے نمبروں کو جمع کیجیے۔ حاصل اعداد و شمار کا مرتب تعدد بٹاؤ جدول بتائیے۔

2۔ اپنے شہر میں 30 دن کے دوران لئے گئے درجہ حرارت کے ریکارڈ کو جمع کیجئے۔ ان اعداد و شمار کو مرتب تعدد جدول میں

دکھایئے۔

3۔ اپنی کلاس کے تمام طلبا کی اونچائی سینٹی میٹر میں ناپئے اور اس اعداد وشمار کا مرتب تعدد بٹاؤ جدول بنایئے۔

جب تینوں گروپ اعداد وشمار کو اکٹھا کریں اور مرتب بٹاؤ جدول بنائیں ان کا اعداد وشمار کا درمیانہ معلوم کریں مناسب طریقے کا استعمال کریں۔

مشق 14.1

1۔ طلباء کے ایک گروپ 2- ماحول سے آگاہی کے پروگرام کے ایک جز کی حیثیت سے ایک سروے کیا۔ جس میں انہوں نے علاقہ کے 20 گھروں میں لگے ہوئے پودوں کی تعداد سے متعلق اعداد وشمار کو اکٹھا کیا، ایک مکان میں لگے پودوں کا درمیان معلوم کیجیے۔

پودوں کی تعداد	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
مکانوں کی تعداد	1	2	1	5	6	2	3

2۔ ایک فیکٹری کے 50 ملازموں کو روز ملنے والی اجرت کے مندرجہ ذیل بٹاؤ پر غور کیجیے۔

روزانہ ملنے والی اجرت (رپیوں میں)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
ملازموں کی تعداد	12	14	8	6	10

3۔ مندرجہ ذیل بٹاؤ کسی علاقہ کے بچوں کو ملنے والے روزانہ کے جیب خرچ کو دیکھا گیا ہے درمیانہ روزانہ کا خرچ 18 روپے ہے گمشدہ تعدد f معلوم کیجیے۔

روزانہ جیب خرچ روپیوں میں	11-13	13-15	15-17	17-19	17-19	21-23	23-25
بچوں کی تعداد	7	6	9	13	f	5	4

4۔ ایک اسپتال میں ایک ڈاکٹر نے 30 عورتوں کی دل کی دھڑکن فی منٹ ریکارڈ کی اور ان کا خلاصہ ذیل کے جدول میں کیا گیا ہے۔ ان عورتوں کی فی منٹ دل کی دھڑکن کا درمیانہ معلوم کیجیے۔

فی منٹ دل کی دھڑکن	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
عورتوں کی تعداد	2	4	3	8	7	4	2

5۔ ایک پھٹکر مارکیٹ میں پھل فروش پیکنگ بوکس میں رکھے ہوئے آموں کے بیچتے ہیں ان بکسوں میں آموں کی تعداد مختلف ہوتی ہے۔مندرجہ ذیل میں آموں کا بکسوں کی تعداد کے مطابق بٹاؤ دیا ہوا ہے۔

آموں کی تعداد	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
بکسوں کی تعداد	15	110	135	115	25

6۔ مندرجہ ذیل جدول ایک علاقہ کے 25 گھروں کا کھانے پر ہو روزانہ کا خرچ دیکھا گیا ہے۔

روز خرچ (روپیوں میں)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
گھروں کی تعداد	4	5	12	2	2

کھانے پر ہونے والے روزانہ کے خرچ کا درمیانہ معلوم کیجیے،اس کے لئے آپ کوئی بھی مناسب طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

7۔ ہوا میں 502 کا ارتکاز (concentration) معلوم کیجیے (P.P.M) ایک شہر کے 30 علاقوں سے اکٹھے کئے گئے اعداد وشمار نیچے دئے گئے ہیں۔

SO_2 کا ارتکاز (in PPm)	تعداد
0.00-0.04	4
0.04-0.08	9
0.08-0.12	9
0.12-0.16	2
0.16-0.18	4
0.18-0.24	2

ہوا میں SO_2 کا درمیانہ ارتکاز معلوم کیجیے۔

8۔ ایک کلاس ٹیچر کے پاس مندرجہ ذیل 40 طلبا کا پورے سال کا غیر حاضری کا ریکارڈ ہے۔طلبا جتنے دن غیر حاضر رہیں۔
اس کا درمیانہ معلوم کیجیے۔

38-40	28-38	20-28	14-20	10-14	6-10	0-6	دنوں کی تعداد
1	3	4	4	7	10	11	طلباء کی تعداد

9۔ ذیل میں شہروں کی خواندگی (فی صد میں) کی شرح دی گئی ہے۔خواندگی کی درمیانہ شرح معلوم کیجیے۔

خواندگی کی شرح (% میں)	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
شہروں کی تعداد	3	10	11	8	3

14.3 مرتب اعداد وشمار کا موڈ

یاد کیجیے آپ نے نویں کلاس میں پڑھا تھا کہ تمام مشاہدات کے درمیان جو مشاہدہ سب سے زیادہ مرتبہ آتا ہے یا جس مشاہدہ کی قدر کا تعدد سب سے زیادہ ہو، موڈ کہلاتا ہے۔مزید ہم نے غیر مرتب اعداد وشمار کا موڈ معلوم کرنے کا طریقہ بھی سیکھا۔ یہاں ہم (مرتب) اعداد وشمار کا موڈ معلوم کرنا سیکھیں گے۔ یہ ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ قدروں کا تعدد اعظم ہو۔ایسی صورت حال میں اعداد وشمار (multimodal) کثیر موڈ والے کہلاتے ہیں۔حالانکہ مرتب اعداد وشمار میں بھی کثیر موڈ ہو سکتے ہیں۔لیکن اس سیکشن میں ہم اپنا مطالعہ صرف واحد موڈ تک ہی محدود رکھیں گے۔

آیئے یاد کرتے ہیں کہ ہم نے غیر مرتب اعداد شمار کا موڈ کس طرح معلوم کیا تھا مندرجہ ذیل مثال پر غور کیجیے۔

مثال 5: ایک بولر کے ذریعے 10 میچوں میں لئے جانے والے وکٹوں کی تعداد ذیل میں دی گئی۔

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

حل : آیئے دیئے گئے اعداد وشمار کا تعدد بٹاؤ جدول بناتے ہیں۔

وکٹوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6
میچوں کی تعداد	1	1	3	2	1	1	1

صاف ظاہر ہے، 2، وکٹوں کی وہ تعداد ہے جو بولر نے سب سے زیادہ لی ہیں (یعنی 3) اس لئے ان اعداد شمار کا موڈ 2 ہے۔

مرتب تعدد بٹاؤ میں یہ ممکن نہیں کہ اب صرف تعدد کو دیکھ کر ہی موڈ میں بانٹ دیں، یہاں ہم پہلے اس کلاس کو تلاش کریں جس کا تعدد سب سے زیادہ ہے، جو موڈل کلاس کہلاتی ہے۔ یہ موڈ اس موڈل کلاس میں کہیں ہوگا اور اس کو ہم مندرجہ ذیل فارمولہ سے معلوم کریں گے۔

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

جہاں l = موڈل کلاس کی نچلی حد

4 = کلاس وقفہ کا سائز (یہ مانتے ہوئے کہ تمام کلاس وقفوں کے سائز یکساں ہیں)

f_1 = موڈل کلاس کا تعد، f_0 = موڈل کلاس سے پہلے کا تعدد

f_2 = موڈل کلاس کے کا تعدد

اس فارمولہ کے استعمال کی وضاحت کے لیے آیئے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کرتے ہیں

کنبہ کا سائز	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
کنبوں کی تعداد	7	8	2	2	1

حل: یہاں اعظم تعدد 8 ہے۔ اور اس کی نظیری کلاس 5–3 ہے اس لئے موڈل کلاس 5–3 ہے۔

اب

موڈل کلاس = 5–3 موڈل کلاس کی نچلی $(l) = 3$ کلاس کا سائز $(h) = 2$

موڈل کلاس کا تعدد $f_1 = 8$ موڈل کلاس سے پہلے کا تعدد $f_0 = 7$

موڈل کلاس کے بعد کا تعدد = 2

اس لیے اب ان قدروں کو فارمولہ میں رکھتے ہیں

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

اس طرح سے مذکورہ بالا اعداد و شمار کا موڈ 3.28 ہے۔

مثال 6: ریاضی کے ایک امتحان میں 30 طلباء کے ذریعے حاصل کردہ نمبروں کا بٹاؤ مثال 1 کے جدول 14.3 میں دیا گیا ہے۔ اس اعداد و شمار کا موڈ معلوم کیجیے۔ درمیانہ اور موڈ کا موازنہ کریں اور ان کی ترجمانی کریں۔

حل: مثال 1 کے جدول 14.3 میں کیونکہ طلباء کی اعظم تعداد (یعنی 7) کے نمبر وقفہ (55–40) میں ہیں۔ اس لیے موڈل کلاس 55–40 اس لئے موڈل کلاس کی نچلی (زیریں) حد = 40

کلاس کا سائز $(h) = 15$، موڈل کلاس کا تعدد $f_1 = 7$

موڈل کلاس سے پہلے کا تعدد $f_0 = 3$، موڈل کلاس کے بعد کا تعد $f_2 = 6$

اب فارمولہ استعمال کرنے پر

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\text{موڈ} = 40 + \left(\frac{7 - 3}{14 - 6 - 3}\right) \times 15 = 52$

اس لیے نمبروں کا موڈ 52 ہے۔

اب، مثال 1 سے آپ کو معلوم ہے کہ اس کا درمیانہ 62 ہے، اس طرح سے زیادہ تر طلباء نئے 52 نمبر حاصل کیے اور ایک طالب علم نے اوسطاً 62 نمبر حاصل کیے ہیں۔

ریمارک:

1۔ مثال 6 میں موڈ درمیانہ سے کم ہے، لیکن کچھ اور سوالوں میں یہ درمیانہ سے زیادہ یا اس کے برابر بھی ہو سکتا ہے۔

2۔ یہ صورت حال کے تقاضے پر منحصر ہے کہ ہم طلبا کے ذریعے حاصل کئے گئے نمبروں کا اوسط معلوم کریں یا زیادہ طلبا کے ذریعے خاص نمبروں کا اوسط معلوم کریں۔ پہلی صورت حال میں درمیان مطلوب ہے جب کہ دوسری صورت حال میں موڈ۔

سرگرمی 3: مشغلہ 2 میں آپ نے جو گروپ بنائے تھے اسے انہیں گروپ پر غور کیجئے۔ اور ان کو وہی کام دیجئے جو آپ نے مشغلہ میں دیئے تھے۔ ہر ایک گروپ سے اعداد وشمار کا موڈ معلوم کرنے کے لیے کہیے وہ اس کا موازنہ درمیانہ سے کریں اور دونوں کے مفہوم کی ترجمانی بھی کریں۔

ریمارک: غیر مساوی کلاس سائز کے مرتب اعداد کا موڈ بھی آپ معلوم کر سکتے ہیں۔ لیکن ہم اس باب میں اس پر بحث نہیں کر رہے ہیں۔

مشق 14.2

1۔ مندرجہ ذیل جدول میں ایک سال کے دوران کی ہسپتال میں داخل ہونے والے مریضوں کی کسی عمریں دی ہوئی ہیں۔

عمر (سالوں میں)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
مریضوں کی تعداد	6	11	21	23	14	5

اوپر دئے گئے اعداد وشمار کا موڈ اور درمیانہ معلوم کیجیے اور مرکزی رجحان کی دو پیمائشوں کی ترجمان اور موازنہ کیجیے۔

2۔ مندرجہ ذیل اعداد وشمار 225 بجلی کے آلات کی زندگی کا وقت (گھنٹوں میں) کے سلسلہ میں اطلاعات کو ظاہر کرتے ہیں۔
آلات کا موڈل عمر کی مدت معلوم کیجیے۔

(گھنٹوں میں) زندگی کا وقت	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
تعداد	10	35	52	61	38	29

3۔ مندرجہ ذیل اعداد وشمار کا بنا ایک گاؤں کے 200 کنبوں کے گھر کا کل ماہانہ خرچ دیا ہوا ہے کنبوں کا موڈل ماہانہ خرچ معلوم کیجئے اوران کا درمیانہ ماہانہ خرچ بھی معلوم کیجیے۔

کنبوں کی تعداد	خرچ (روپیوں میں)
29	1000 - 1500
40	1500 - 2000
33	2000 - 2500
28	2500 - 3000
30	3000 - 3500
22	3500 - 4000
16	4000 - 4500
7	4500 - 500

4۔ مندرجہ ذیل بٹاؤ ہندوستان کے ہائر سیکنڈری اسکولوں میں صوبوں کے حساب سے استاد طلب علم مثبت دی ہوئی ہے ان اعداد وشمار کا درمیانہ اور موڈ معلوم کیجئے اور دونوں پیائشوں کی ترجمانی کیجیے۔

صوبوں/UT	طلباء کی تعداد فی استاد
3	15 - 20
8	20 - 25
9	25 - 30
10	30 - 35
3	35 - 40
0	40 - 45
0	45 - 50
2	50 - 55

5. مندرجہ ذیل بٹاؤ بین الاقوامی کرکٹ میچوں میں دنیا کے چوٹی کے بلے بازوں کے ذریعے اسکور کئے گئے رنوں کی تعداد کو دکھایا ان اعداد وشمار کا موڈ معلوم کیجیے۔

بلے بازوں کی تعداد	اسکور کئے گئے رن
4	3000 - 4000
18	4000 - 5000
9	5000 - 6000
7	6000 - 7000
6	7000 - 8000
3	8000 - 9000
1	9000 - 10000
1	10000 - 11000

6۔ 3 منٹ کے 100 وقفوں میں ایک طالب علم نے سڑک کے کسی ایک مقام پر گذرنے والی کاروں کی تعداد کو نوٹ کیا اور اس کا خلاصہ مندرجہ ذیل جدول میں کیا، ان اعداد وشمار کا موڈ معلوم کیجیے۔

کاروں کی تعداد	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
تعدد	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4 مرتب اعداد وشمار کا وسطانیہ

جیسا کہ آپ نویں کلاس میں پڑھ چکے ہیں کہ وسطانیہ مرکزی رجحان کی وہ پیمائش ہے۔ جو اس کی اعداد وشمار میں موجود مشاہدات، بیچ کے مشاہدہ کو ظاہر کرتا ہے۔ یاد کیجئے غیر مرتب اعداد وشمار کا مطالعہ معلوم کرنے کے لئے پہلے ہم مشاہدات کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں رکھتے ہیں۔ اور پھر اگر n طاق ہوتا ہے۔تو $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ th مشاہدات درمیانہ اور اگر n جفت ہو تو $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ th مشاہدہ کا اوسط 100 طالب علموں کے ایک مثبت میں 50 میں حاصل کئے گئے نمبر دکھائے گئے ہیں۔

حاصل کردہ نمبر	20	29	28	33	42	38	43	25
طلبا کی تعداد	6	28	24	15	2	4	1	20

پہلے ہم نمبروں بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں اور مندرجہ ذیل تعددی جدول بناتے ہیں۔

جدول 14.9

اصل کردہ نمبر	طلبا کی تعداد
6	20
20	25
24	28
28	29
15	33
4	38
2	42
1	43
100	کل

یہاں $x = 100$ جو جفت ہے، اس لئے وسطانیہ $\left(\frac{n}{2}\right)th$ اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$th مشاہدہ کا اوسط ہوگا بھی 50^{th} ویں اور 51^{th} ویں اور مشاہدہ ان مشاہدوں کو معلوم کرنے کے لئے ہم مندرجہ ذیل طریقوں سے آگے بڑھتے ہیں۔

جدول 14.10

طلبا کی تعداد	حاصل کردہ اعداد
6	20
6 + 20 = 26	25 تک
26 + 24 = 50	28 تک
50 + 28 = 78	29 تک
78 + 15 = 93	33 تک
93 + 4 = 97	38 تک
97 + 2 = 99	42 تک
99 + 1 = 100	43 تک

اب اس اطلاع کو تعدد جدول میں دکھانے کے لئے ہم ایک اور کالم اس میں جوڑتے ہیں جسے مجموعی تعدد کالم کہتے ہیں۔

جدول 14.11

مجموعی تعدد	طلباء کی تعداد	حاصل کردہ نمبر
6	6	20
26	20	25
50	24	28
78	28	29
93	15	33
97	4	38
99	2	42
100	1	43

جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ 50th مشاہدہ 28 (کیوں؟) 51st مشاہدہ 29 ہے۔

اس لئے وسطانیہ = $\frac{28 + 29}{2} = 28.5$

ریمارک: جدول 14.11 کا حصہ جس میں کالم 1 اور 3 ہیں۔ مجموعی تعدد جدول کہلاتا ہے۔ نمبروں کا وسطانیہ 28.5 سے پتہ چلتا ہے کہ 50% طلبا کے نمبر 28.5 سے کم اور 50% طلبا کے نمبر 28.5 سے زیادہ ہیں۔

آیئے اب دیکھتے ہیں کہ مرتب اعداد و شمار کا وسطانیہ کیسے معلوم کیا جاتا ہے۔ اس کے لئے ہم مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرتے ہیں۔

آیئے اب کسی امتحان میں 53 طلبا کے ذریعے 100 نمبروں میں حاصل کردہ نمبروں کے مرتب تعددی بٹاؤ پر غور کرتے ہیں جو ذیل میں دیا ہوا ہے۔

جدول 14.12

نمبر	طلباء کی تعداد
5	0 - 10
3	10 - 20
4	20 - 30
3	30 - 40
3	40 - 50
4	50 - 60
7	60 - 70
9	70 - 80
7	80 - 90
8	90 - 100

اس جدول کو دیکھ کر مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے

کتنے طلبا نے 10 سے کم نمبر حاصل کئے؟ اس کا جواب واضح ہے کہ 5 ہے۔ کتنے طلباء نے 20 نمبروں سے کم نمبر حاصل کئے ان طلبا کی تعداد میں جنہوں نے 20 سے کم نمبر حاصل کئے ہیں وہ طلبا بھی شامل ہیں جنہوں 10-0 کے درمیان حاصل کئے ہیں۔

اور وہ طلبا بھی جنہوں نے 20-10 کے درمیان نمبر حاصل کئے ہیں اس لئے طلباء جنہوں نے 20 سے کم نمبر حاصل کئے ہیں اس کی تعداد ہے 3+5 یعنی 8 اس لئے ہم کہتے ہیں کہ کلاس 20 – 10 کا مجموعی تعدد 8 ہے۔

اسی طرح سے ہم دوسری کلاسوں کی مجموعی تعدد بھی معلوم کر سکتے ہیں یعنی ان طلبا کی تعداد جن کے نمبر 30 سے کم 40 سے کم 100 سے کم۔ ہم ان کو جدول 14.13 میں دیکھیں گے۔

جدول 14.13

حاصل کردہ نمبر	طلباء کی تعداد
10 سے کم	5
20 سے کم	5 + 3 = 8
30 سے کم	8 + 4 = 12
40 سے کم	12 + 3 = 15
50 سے کم	15 + 3 = 18
60 سے کم	18 + 4 = 22
70 سے کم	22 + 7 = 29
80 سے کم	29 + 9 = 38
90 سے کم	38 + 7 = 45
100 سے کم	45 + 8 = 53

مذکورہ بٹاؤ (سے کم) مجموعی تعدد بٹاؤ کہلاتا ہے۔ یہاں 10, 20, 30,...,100 ترتیب وار کلاسوں کی بالائی حدود ہیں۔ ہم اسی طرح سے ان طلباء کی تعداد کا جدول بنا سکتے ہیں جنہوں نے 0 سے زیادہ یا برابر، 10 سے زیادہ یا برابر 20 سے زیادہ یا برابر نمبر حاصل کئے ہوں جدول 14.12 سے مشاہدہ کرتے ہیں کہ تمام 53 طلباء نے 0 سے زیادہ یا برابر نمبر حاصل کئے ہیں۔ کیونکہ ایسے 5 طلباء نے 10 یا 10 سے زیادہ نمبر حاصل کئے ہیں۔ اسی طرح سے جاری رکھتے ہیں ہمیں ان طلباء کی تعداد معلوم ہو جائے گی جنہوں نے 20 یا 20 سے زیادہ نمبر حاصل کئے ہیں یعنی 3 – 48 = 45 طلباء اور 30 سے یا 30 سے زیادہ 4 – 45 = 41 طلباء اور آ گے

تک جیسا کہ جدول 14.14 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 14.14

حاصل کردہ نمبر	طلباء کی تعداد (مجموعی تعدد)
0 کے برابر یا زیادہ	53
10 کے برابر یا زیادہ	53 – 5 = 48
20 کے برابر یا زیادہ	48 – 3 = 45
30 کے برابر یا زیادہ	45 – 4 = 41
40 کے برابر یا زیادہ	41 – 3 = 38
50 کے برابر یا زیادہ	38 – 3 = 35
60 کے برابر یا زیادہ	35 – 4 = 31
70 کے برابر یا زیادہ	31 – 7 = 24
80 کے برابر یا زیادہ	24 – 9 = 15
90 کے برابر یا زیادہ	15 – 7 = 8

مندرجہ بالا جدول سے زیادہ قسم کا مجموعی تعدد جدول ہے۔ یہاں 0, 10, 20, ...90 مناظر کلاس وقفوں کے نچلی (زیریں) حد کہلاتی ہے۔ اس لئے مرتب اعداد وشمار کا وسطانیہ معلوم کرنے کے اس میں سے کسی ایک مجموعی تعدد جدول کا استعمال کر سکتے ہیں۔

آیئے جدول 14.12 اور 14.13 جدول کو ملا کر جدول 14.15 جدول حاصل کرتے ہیں جو ذیل میں دی گئی ہے۔

جدول 14.15

نمبر	طلباء کی تعداد (f)	مجموعی تعدد (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

اب مرتب اعداد وشمار میں ہم مجموعی تعدد کو دیکھ کر وسطی مشاہدہ نہیں معلوم کر سکتے کیونکہ وسطی قدر کلاس وقفہ میں کہیں ہوگی۔ اس لئے یہ ضروری ہے کہ یہ قدر اس کلاس کے اندر تلاش کی جائے جو تعددی بٹاؤ کو دو نصف میں تقسیم کر دے۔ لیکن یہ کلاس کون سی ہوگی؟

اس کلاس کو معلوم کرنے کے لئے ہم تمام کلاسوں کا مجموعی تعدد معلوم کرتے ہیں اور $\frac{n}{2}$ ۔

اور پھر ہم وہ کلاس تلاش کرتے ہیں جس کا مجموعی تعدد $\frac{n}{2}$ (اور اسے نزدیک سے بڑا ہو۔)

اس کو وسطانیہ کلاس کہتے ہیں اوپر دئے گئے بٹاؤ میں n=53، اس لئے 26.5= $\frac{n}{2}$ اب

60-70 وہ کلاس ہے جس کا مجموعی تعدد 29 ہے جو $\frac{n}{2}$ سے بڑا (اور نزدیک) ہے یعنی 26.5۔

اس لئے 60-70 وسطانیہ کلاس ہے

وسطانیہ کلاس معلوم کرنے کے بعد ہم وسطانیہ معلوم کرنے کے لئے مندرجہ ذیل فارمولہ کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h,$$ جہاں

وسطانیہ کلاس کی نچلی حد = l

مشاہدات کی تعداد = n

وسطانیہ کلاس کی تعداد = f

کلاس سائز (یہ مانتے ہوئے کہ کلاس سائز یکساں ہو) = h

$\frac{n}{2} = 26.5$، $l = 60$، c f = 22، f = 7، h = 10 فارمولہ میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{وسطانیہ} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7} = 66.4$$

اس طرح سے تقریباً آدھے طلباء نے 66.4 سے زیادہ نمبر حاصل کئے۔

مثال 7: ایک اسکول کی x کلاس کی 51 طالبات کی اونچائی (سینٹی میٹر میں) سے متعلق سروے کیا اور مندرجہ ذیل اعداد وشمار

حاصل کئے گئے۔

لڑکیوں کی تعداد	اونچائی (cm میں)
4	140 سے کم
11	145 سے کم
29	150 سے کم
40	155 سے کم
46	160 سے کم
51	165 سے کم

وسطانیہ اونچائی معلوم کیجیے۔

حل: وسطانیہ اونچائی معلوم کرنے کے لئے ہمیں کلاس وقفہ اور ان کا نظیری تعدد معلوم کرنے میں دیا ہوا تعددی بٹاؤ کم سے کم کا ہے، 140, 145, 150, ...,165 سے، نظیری کلاس وقفوں کی بالائی حدیں ہیں۔ اس لئے کلاس 140 سے کم ہے: 160-165 ...,140-145,140-145 مشاہدہ کیجئے کہ دئے ہوئے بٹاؤ سے ہم پاتے کہ 4 لڑکیاں ایسی ہیں جن کی اونچائی 140 سے کم ہے یعنی 140 سے کم کے کلاس وقفوں کا تعدد 4 ہے۔ 11 لڑکیاں ایسی ہیں جن کی اونچائی 145 سے کم ہے اور 4 ایسی ہیں جن کی 140 سے کم ہے اس لئے ان لڑکیوں کی تعداد اونچائی قفہ 140-145 ہے۔(11-4) یعنی 7 اسی طرح سے 145-150 کا تعدد (29-11) یعنی 18 ہے اور 150-155 کا تعدد (40-29) یعنی 11 ہے اور آگے تک۔ اس لئے ہمارا تعددی بٹاؤ جدول مجموعی تعدد کے ساتھ ہوگا۔

جدول 14.16

مجموعی تعدد	تعدد	کلاس وقفہ
4	4	140 سے کم
11	7	140 - 145
29	18	145 - 150
40	11	150 - 155
46	6	155 - 160
51	5	160 - 165

اب n=51، اس لئے $25.5 = \frac{51}{2} = \frac{n}{2}$ = 25.5 یہ مشاہدہ (145-150) کے درمیان واقع ہے

تب l (نچلی حد)=145

cf (145-150) سے پہلے کی کلاس کا مجموعی تعدد=11

f (وسطانیہ کلاس 145-150) کا تعدد=18

h (کلاس کا سائز) =5

فارمولہ استعمال کرنے پر $\text{وسطانیہ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$

$\text{وسطانیہ} = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$

$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$

اس لئے لڑکیوں کی وسطانیہ اونچائی 149.03 سینٹی میٹر ہے۔

اس کا مطلب ہے کہ 50% لڑکیوں کی اونچائی اس اونچائی سے کم اور 50% کی اس اونچائی سے زیادہ ہے۔

مثال 8: مندرجہ ذیل اعداد و شمار کا وسطانیہ 525 ہے، x اور y کی قدر معلوم کیجئے اگر کل تعدد 100 ہے۔

کلاس وقفہ	تعدد
0-100	2
100-200	5
200-300	x
300-400	12
400-500	17
500-600	20
600-700	y
700-800	9
800-900	7
900-1000	4

حل:

کلاس کے وقفہ	تعدد	مجموعی تعدد
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

یہ دیا ہوا ہے کہ $n = 100$، اس لئے $76 + x + y = 100$ یعنی $x + y = 24$ (1)

وسطانیہ 525 ہے جو 500 - 600 کے درمیان ہے۔ اس لئے $l = 500$، $h = 100,$

فارمولہ کو استعمال کرنے پر، وسطانیہ $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) h,$

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20}\right) \times 100$$

یعنی $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

یعنی $25 = 70 - 5x$

یعنی $5x = 70 - 25 = 45$

اس لئے $x = 9$

اس لئے (1) ہمیں ملتا ہے $9 + y = 24$

یعنی $y = 15$

اب آپ نے تینوں مرکزی رجحان کے پیمائشوں کے بارے میں پڑھ لیا۔ آیئے اب بحث کرتے ہیں کہ کون سی پیمائش کسی خاص ضرورت کے لئے سب سے بہتر ہے۔

درمیانہ سب سے زیادہ استعمال ہونے والی مرکزی رجحان کی پیمائش ہے کیونکہ اس میں ہم تمام مشاہدات کو شامل کرتے ہیں اور یہ سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدہ کے درمیان ہوتا ہے۔ یہ ہمیں دو یا دو سے زیادہ بٹاؤ کا موازنہ کرنے میں بھی مدد دیتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی خاص امتحان میں مختلف اسکولوں میں طلباء کے نتائج کا موازنہ کرنے سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ کس اسکول کی کارکردگی سب سے بہتر ہے۔ جب کہ اعداد و شمار کی انتہائی قدریں (سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی) درمیانہ پر اثر انداز ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر کم یا زیادہ تعدد کی کلاسوں کا درمیانہ اعداد و شمار کی صحیح نمائندگی کرتا ہے۔ لیکن اگر ایک کلاس کا تعدد مان لیجیے 2 ہے اور 5 دوسری کلاسوں کا تعدد 20, 25, 20, 21, 15 تب درمیانہ اعداد و شمار کی صحیح عکاسی نہیں کرے گا۔

ایسے مسئلوں میں جہاں انفرادی مشاہدات کی کوئی اہمیت نہیں ہوتی اور ہمیں ایک اشارتی مشاہدہ معلوم کرنا ہوتا ہے، ایسی حالت میں وسطانیہ سب سے زیادہ مناسب معلوم ہوتا ہے مثال کے طور پر ملک کے ملازمین کا اوسط اجرات ملازمین کے ذریعے مخصوص پیداوار کی شرح وغیرہ معلوم کرا جرت وغیرہ۔ یہ ایسی صورت حال ہیں جہاں انتہائی قدریں ہوتی ہیں اس لئے ان حالتوں کے درمیانہ کے بجائے وسطانیہ بہتر مرکزی رجحان کی پیمائش ہے۔

ایسی صورتِ حال جس میں بہت ہی اہم چیز ہے یا ایسی چیزیں جن کی تکرار ہوتی ہو، کو معلوم کرنا مقصد ہو اس کے لئے موڈ بہتر پیمائش ہے مثال کے طور پر سب سے زیادہ دیکھے جانے والا T. V. کا پروگرام، کوئی ایسی شے جس کی مارکیٹ میں سب سے زیادہ مانگ ہو یا زیادہ تر لوگوں کے ذریعہ استعمال کئے جانے والے رنگ کی گاڑی وغیرہ۔

ریمارک:

1. مرکزی رجحان کی پیمائشوں میں ایک علمی تعلق ہے۔

درمیانہ + موڈ = 3 وسطانیہ

2. مرتب اعداد و شمار کے غیر مساوی کلاس سائزوں کا وسطانیہ بھی معلوم کیا جا سکتا ہے۔ لیکن یہاں ہم اس کے بارے میں نہیں پڑھیں گے۔

مشق 14.3

1۔ مندرجہ ذیل تعددی بٹاؤ ایک علاقہ کے 68 لوگوں کا بجلی کا ماہانہ خرچ دیا ہوا ہے۔ ان اعداد شمار کا درمیانہ، وسطانیہ اور موڈ معلوم کیجیے اور ان کا موازنہ کیجیے گا۔

لوگوں کی تعداد	ماہانہ خرچ
4	65 - 85
5	85 - 105
13	105 - 125
20	125 - 145
14	145 - 165
8	165 - 185
4	185 - 205

2۔ اگر مندرجہ ذیل بٹاؤ کا وسطانیہ 28.5 ہے x تو y کی قدریں معلوم کیجیے۔

تعدد	کلاس وقفہ
5	0-10
x	10-20
20	20-30
15	30-40
y	40-50
5	50-60
60	کل

3۔ ایک LIC ایجنٹ نے 100 پالیسی رکھنے والے لوگوں کی عمروں کے بٹاؤ کے اعداد و شمار مندرجہ ذیل دیے ہیں۔ وسطانیہ عمر معلوم کیجیے جب کہ پالیسی صرف ان لوگوں کو دی جاتی ہے جن کی عمر 18 سال سے 60 سال کے درمیان ہو۔

پولیسی رکھنے والوں کی تعداد	عمر (سالوں میں)
2	20 سے کم
6	25 سے کم
24	30 سے کم
45	35 سے کم
78	40 سے کم
89	45 سے کم
92	50 سے کم
98	55 سے کم
100	60 سے کم

4۔ ایک پودے کی 40 پتیوں کی لمبائیاں نزدیکی ملی میٹر تک پیائش کی گئیں ہیں اور حاصل کردہ اعداد و شمار کو مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے۔

پتیوں کی تعداد	لمبائی (ملی میٹر میں)
3	118-126
5	127-135
9	136-144
12	145-153
5	154-162
4	163-172
2	172-180

پتیوں کی وسطانیہ لمبائی معلوم کیجیے (اشارہ: وسطانیہ معلوم کرنے کے لئے اعداد و شمار کو مسلسل کلاسوں میں تبدیل کیجیے۔ کیونکہ فارمولہ مسلسل کلاسوں کے لئے۔ کلاس میں اس طرح سے بدل کر ہو جائیں گے۔ - 117.5 - 126.5, 126.5 135.5, . . ., 171.5 - 180.5۔

5۔ مندرجہ ذیل بٹاؤ جدول 400 نیان لیمپوں کے عمر کی مدت کار (زندگی کا وقت) کو دکھاتا ہے۔ لیمپ کی وسطانیہ عمر کی مدت کار معلوم کیجیے۔

Lifetiem (گھنٹوں میں)	لیمپوں کی تعداد
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

6۔ ایک ٹیلیفون مقامی ڈائریکٹری 100 سر خاندانی چنے گئے۔ ہر سرنیم میں موجود انگریزی کے حروف کی تعداد کا تعددی بٹاؤ ذیل میں دیا گیا ہے۔

حروف کی تعداد	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
(Surname) کی تعداد	6	30	40	16	4	4

خاندانی کے حروف کا وسطانیہ معلوم کیجیے، سرنیم کے حروف کی تعداد کا درمیانہ بھی معلوم کیجئے؟ سرنیم کا موڈل سائز بھی معلوم کیجئے۔

7۔ مندرجہ مندرجہ بٹاؤ ایک کلاس کے ایک 30 طلباء کے اوزان کا دکھاتا ہے، طلباء کا وسطانیہ وزن معلوم کیجیے۔

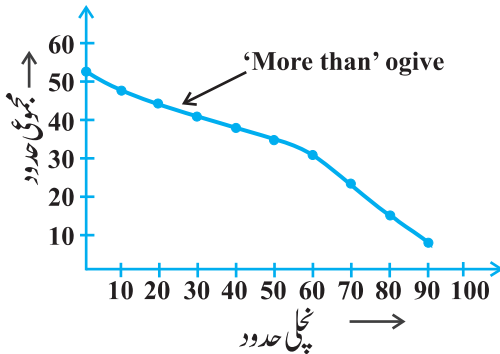
وزن (کلوگرام)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
طلباء کی تعداد	2	3	8	6	6	3	2

14.5 مجموعی تعدد کا گرافی اظہار

جیسا کہ ہم سب جانتے ہیں کہ تصویریں الفاظ سے زیادہ اور بہتر بولتی ہیں۔ گرافی اظہار ہمیں کسی بھی اعداد و شمار کو سمجھنے میں مدد

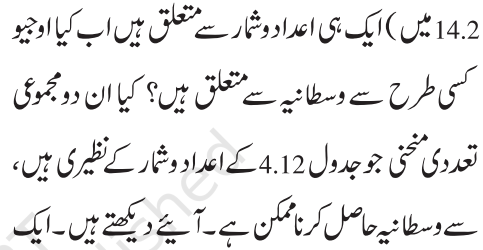
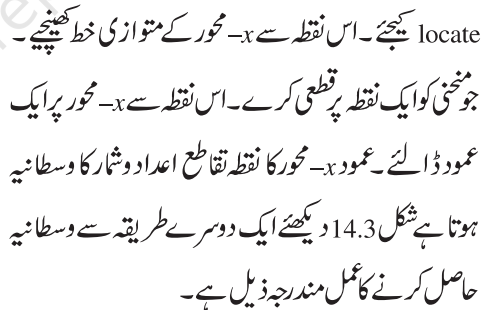
کرتا ہے۔نویں کلاس میں ہم نے اعداد وشمار کو بار گراف، ہسٹوگرام اور تعدد کثیر ضلعی سے ظاہر کیا۔آیئے اب مجموعی تعدد بٹاؤ کو گراف کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر جدول 14.17 میں دئے گئے مجموعی بٹاؤ پر غور کرتے ہیں۔

یاد کیجئے کہ قدریں 10, 20, 30, ...100 مناظر کلاسوں کی ترتیب وار بالائی حدود ہیں۔اس اعداد وشمار کو گرافی طور پر ظاہر کرنے کے لئے ہم کلاس وقفوں کی بالائی حدود کو افقی محور (x-محور) پر نشان زد کرتے ہیں اور ان کی نظیری مجموعی تعدد کو انتخابی محوروں پر ضروری نہیں کہ یکساں ہو۔آیئے اب نظیری مرتب جوڑوں کی (بالائی حد اور نظیری عمومی تعدد) کو پلاٹ کیجئے یعنی (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) کو، گراف پیپر پر پلاٹ کیجئے اور اس free hand منحنی سے ملا دیجیے۔ اس طرح سے ملی منحنی مجموعی تعدد منحنی یا اوجیو (سے کم قسم کی،) شکل 14.1 دیکھیے۔

شکل 14.1

لفظ اوجیو لفظ اوجی Ogee سے اخذ کیا گیا ہے، اوجی ایک ایسا Shape ہے جس ایک مقعر (concave) قوس ایک محدب (Convex) قوس میں بہتا ہوا محسوس ہوتا اس طرح سے S کی شکل کی ایک منحنی بنتی ہے جن کے سرے انتصابی ہوتے ہیں، آرکیٹیکچر میں اوجی Shape 14 ویں اور 15 ویں صدی کے Gothic Styles کی خصوصیات میں سے ایک ہے۔

شکل 14.2

آگے ہم دوبارہ جدول 14.14 میں دئے گئے مجموعی تعدد کی بٹاؤ پر غور کرتے ہیں اور ایک اوجیو (سے زیادہ قسم کا) بناتے ہیں۔

یاد کیجئے کہ یہاں 0, 10, 20, ...90 نظیری کلاس وقفوں 0-10, 10-20, ...90-100 کی نچلی حدیں ہیں، سے زیادہ قسم کو گرافی طور پر ظاہر کرنے کے لئے ہم ذیلی

(نچلی) حد کو x- محور پر اور نظیری مجموعی تعدد کو y- محور پر لیتے ہیں اور پھر ہم نقاط (نچلی حد، اور اس کی نظیری مجموعی تعدد) یعنی (10, 35)، (10,48)، (20-45)، (30,41)، (40,38)، (50,35)، (60,31)، (70,24)، (80,15)، (90,8) کو گراف پیپر پر پلاٹ کرتے ہیں اور پھر اس کو free hand منحنی سے جوڑ دیتے ہیں۔ اس طرح سے حاصل منحنی مجموعی تعددی منحنی یا اوجیو کہلاتی ہے (سے زیادہ قسم کی) شکل 14.2 دیکھیے۔

60 50 40 30 20 10

مجموعی تعدد

Median (66.4)

10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

بالائی حدود

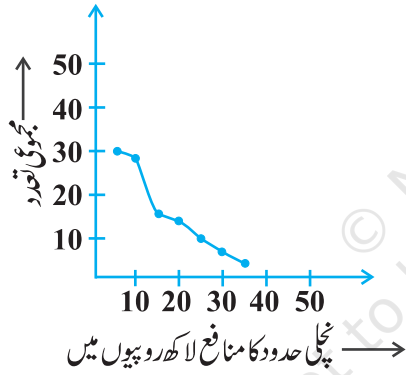
شکل 14.3

ریمارک: نوٹ کیجیے کہ دونوں اوجیو (شکل 14.1 اور شکل 14.2 میں) ایک ہی اعداد و شمار سے متعلق ہیں اب کیا اوجیو کسی طرح سے وسطانیہ سے متعلق ہیں؟ کیا ان دو مجموعی تعددی منحنی جو جدول 4.12 کے اعداد و شمار کے نظیری ہیں، سے وسطانیہ حاصل کرنا ممکن ہے۔ آیئے دیکھتے ہیں۔ ایک واضح طریقہ ہے کہ y- محور پر $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ کو locate کیجیے۔ اس نقطہ سے x- محور کے متوازی خط کھینچیے۔ جو منحنی کو ایک نقطہ پر قطعی کرے۔ اس نقطہ سے x- محور پر ایک عمود ڈالئے۔ عمود x- محور کا نقطہ تقاطع اعداد و شمار کا وسطانیہ ہوتا ہے شکل 14.3 دیکھئے ایک دوسرے طریقہ سے وسطانیہ حاصل کرنے کا عمل مندرجہ ذیل ہے۔

شکل 14.4

دونوں اوجیو (یعنی سے کم قسم کا اور سے زیادہ قسم کا) کو ایک ہی محور پر بنایئے دونوں اوجیو ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر قطع کریں گے۔ اگر اس نقطہ سے ہم x- محور پر عمود دیکھیں، تو وہ نقطہ جہاں یہ x- محور کو قطع کر سکے گیا، وسطانیہ ہوگا۔ (شکل 14.4 دیکھیے۔

مثال 9: ایک علاقہ کے ایک Shopping Complex کی 30 دکانوں کا سالانہ منافع مندرجہ ذیل بٹاؤ میں دکھایا گیا ہے۔

دکانوں کی تعداد (تعدد)	منافع (لاکھوں روپیوں میں)
30	5 سے زیادہ یا برابر
28	10 سے زیادہ یا برابر
16	15 سے زیادہ یا برابر
14	20 سے زیادہ یا برابر
10	25 سے زیادہ یا برابر
7	30 سے زیادہ یا برابر
3	35 سے زیادہ یا برابر

ان اعداد و شمار کا اوجیو بنائیے، اور پھر وسطانیہ منافع معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے ہم مختص محور بناتے ہیں اور منافع کی نچلی حد کو افقی محور پر اور عمودی تعدد کی انتصابی محور کے ہمراہ لیتے ہیں اور پھر ہم نقاط (5,30)، (10,28)، (15,16)، (20,14)، (25,10)، (30,7)، اور (35,3) کو پلاٹ کرتے ہیں۔ ہم ان نقاط کو ایک سطح منحنی سے ملائیں۔ جس سے زیادہ قسم کا اوجیو ملے گا جو شکل 14.5 میں دکھایا گیا ہے۔

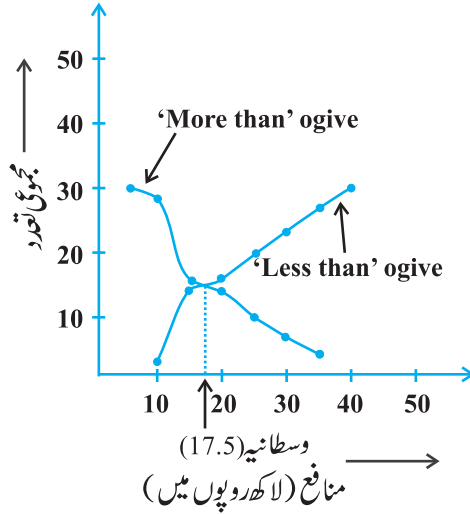
شکل 14.5

آیئے اب اوپر دئے گئے جدول سے کلاسیں اور ان کے تعدد لیتے ہیں۔

کلاس	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
دوکانوں کی تعداد	2	12	2	4	3	4	3
مجموعی تعدد	2	14	16	20	23	27	30

ان قدروں کا استعمال کرتے ہوئے ہم نقاط (10,2)، (5,14)، (20,16)، (25,20)، (30,23)، (35,27) اور (40,30) کو انہیں محوروں پر پلاٹ کرتے ہیں جیسے کہ شکل 14.5 میں دکھایا گیا ہے۔ جس سے ہمیں کم قسم کا اوجیو ملے گا جیسا کہ

شکل14.6

شکل14.4 میں دکھا گیا ہے۔
ان کے نقطہ تقاطع کو طولی مختص (abcissa) تقریباً 17.5 ہے جو وسطانیہ ہے۔اس کی تصدیق فارمولہ کو استعمال کر کے کر سکتے ہیں،اس طرح سے منافع کا وسطانیہ (لاکھوں میں) 17.5 ہے۔

ریمارک: مذکورہ بالا مثال میں یہ بات نوٹ کرنے کی ہے کہ کلاس میں وقفہ مسلسل ہیں۔اوجیو بنانے کے لئے یہ بات یقینی ہونی چاہئے کہ کلاس وقفہ مسلسل ہوں (نویں جماعت میں ہسٹوگرام کی تشکیل دیکھیے)۔

مشق 14.4

1۔ مندرجہ ذیل بٹاؤ ایک فیکٹری کے 50 ملازموں کی روزانہ آمدنی کو دکھا تا ہے۔

روزانہ آمدنی (روپیوں میں)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
ملازموں کی تعداد	12	14	8	6	10

مذکورہ بالا بٹاؤ کو، سے کم قسم کے مجموعی تعدد بٹاؤ میں بدلئے اور اوجیو بنایئے۔

2۔ ایک کلاس 35 طلباء کے میڈیکل جانچ کے دوران ریکارڈ کئے گئے ان کے وزن مندرجہ ذیل ہیں۔

طلباء کی تعداد	وزن کلوگرام میں
0	38 سے کم
3	40 سے کم
5	42 سے کم
9	44 سے کم
14	46 سے کم
28	48 سے کم
32	50 سے کم
35	52 سے کم

3۔ مندرجہ ذیل جدول میں ایک دیہات کے 100 کھیتوں میں گیہوں کی فی ہیکٹیئر پیداوار کو دکھایا گیا ہے۔

پیداوار اور کلوگرام فی ہیکٹیئر	50-55	55-60	60-55	65-70	70-75	75-80
کھیتوں کی تعداد	2	8	12	24	38	16

اس بٹاؤ کو، سے زیادہ قسم کے بٹاؤ میں تبدیل کیجیے اور اس کا اوجیو بنائیے۔

14.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1۔ مرتب اعداد و شمار کا درمیانہ معلوم کیا جا سکتا ہے

(i) راست طریقہ $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) assumed mean کا طریقہ $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) step deviation کا طریقہ $\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$

اس مفروضہ کے ساتھ کہ کسی کلاس کا تعدد اس کے وسطی نقطہ کے گرد مرکوز ہے۔ جو کلاس مارک کہلاتا ہے۔

2۔ مرتب اعداد و شمار کا موڈ مندرجہ ذیل فارمولہ کو استعمال کر کے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

جہاں علامتیں، عام مفہوم میں ہیں

3۔ کسی کلاس کا مجموعی تعدد وہ تعدد ہے جو تمام کلاسوں کے تعدد کو ان کے پچھلے تعدد میں جمع کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

4۔ مرتب اعداد و شمار کا وسطانیہ مندرجہ ذیل فارمولہ استعمال کر کے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$$

جہاں علامتیں عام مفہوم میں ہیں

5۔ مجموعی تعدد بٹاؤ کو گرافی طور پر مجموعی تعدد منحنی یا کم قسم سے زیادہ قسم کے اوجیو سے ظاہر کرنا۔

6۔ مرتب اعداد و شمار کے وسطانیہ کو گرافی طور پر اس اعداد و شمار کے دو اوجیو کے نقطہ تقاطع کے x۔ مختص کے طور پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

قارئین کے لئے نوٹ

مرتب اعداد وشمار کا وسطانیہ اور موڈ معلوم کرنے کے لئے یہ ضروری ہے کہ فارمولہ استعمال کرنے سے پہلے یہ یقینی کرلیا جائے کہ کلاس وقفہ مسلسل ہوں۔ یہی شرط اوجیو بنانے کے لئے بھی ضروری ہے۔ مزید اوجیو کے سلسلہ میں دونوں محوروں کا پیمانہ یکساں ہونا ضروری نہیں ہے۔